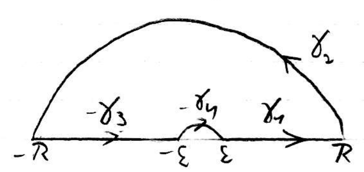
פתרון תרגיל 6-7 בשיטות תורת הפונקציות המרוכבות

1. האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$



נגדיר γ המסילה:

אז $\gamma_4(t)=\varepsilon e^{it}$ $\gamma_2(t)=Re^{it}$ $\gamma_2,\gamma_4:[0,\pi]\to\mathbb{C}$

$\gamma_3:[-R,-\varepsilon]\to\mathbb{C}$, $\gamma_1:[\varepsilon,R]\to\mathbb{C}$ $\gamma_1(t)=t$, $\gamma_3(t)=t$

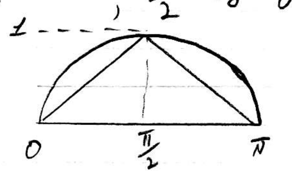
$$\int_\gamma\frac{e^{iz}}{z}dz=\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}-\int_{\gamma_4}\right)\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

לפי γ_2:

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|=\left|\int_0^\pi\frac{e^{iRe^{it}}}{\cancel{Re^{it}}}i\cancel{Re^{it}}dt\right|=$$

$$=\left|\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt\right|\le\int_0^\pi e^{-R\sin t}\cdot\underbrace{|e^{iR\cos t}|}_{1}dt=\int_0^\pi e^{-R\sin t}dt\le$$

בין 0 ל-$\frac{\pi}{2}$ $\sin t\ge\frac{2}{\pi}t$, בין $\frac{\pi}{2}$ ל-π $\sin t\ge 2-\frac{2}{\pi}t$

(לפי 

) לכן

$$\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2R}{\pi}t}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-2R}e^{\frac{2R}{\pi}t}dt=$$

$$=-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R}{\pi}t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+e^{-2R}\cdot\frac{\pi}{2R}e^{\frac{2R}{\pi}t}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\frac{\pi}{2R}\left[-(e^{-R}-1)+e^{-2R}(e^{2R}-e^{R})\right]=\frac{\pi}{R}(1-e^{-R})\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

לפי γ_4:

$$\int_{\gamma_4}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^\pi\frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\cancel{\varepsilon e^{it}}}i\cancel{\varepsilon e^{it}}dt=i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}}$$

נראה כי $e^{i\varepsilon e^{it}}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{\text{במ"ש}}1$ ואכן, אם נסמן $u(t)=ie^{it}$

אז $|u(t)|=1$ לכל t ולכן:

$$|e^{\varepsilon u}-1|=\left|1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n u^n}{n!}-1\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\underbrace{|u^n|}_{1}=e^{\varepsilon}-1\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0$$

ללא תלות ב-t, לכן ההתכנסות במ"ש ולכן

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_4}\frac{e^{iz}}{z}dz=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^\pi ie^{i\varepsilon e^{it}}dt=i\int_0^\pi\lim_{\varepsilon\to0}e^{i\varepsilon e^{it}}dt=$$

$$=i\int_0^\pi dt=i\pi$$

לכן $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{t}dt=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\R\to\infty}}\left(\int_{\gamma_3}+\int_{\gamma_1}\right)\frac{e^{iz}}{z}dz=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\R\to\infty}}0+\int_{\gamma_4}-\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z}dz=$

$$=i\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{t}dt=\mathrm{Im}\,i\pi=\pi$$

2. תהא f פונקציה שלמה, נצ"ג $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

(א) נתון כי $|f'(z)| \le M(1+\sqrt{|z|})$ אז, לכל קיים:

לכל R (חיובי)
$$\left\{\begin{aligned} |na_n| &= \left|n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| = \left|\frac{n}{n}\frac{(f')^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f'(z)}{z^{n-1+1}}dz\right| \le \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(Re^{it})}{R^n e^{int}} iRe^{it}\right|dt = \frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi}|f'(Re^{it})|\,dt \overset{\text{מהנתון}}{\le} \\ &\le \frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi} M(1+\sqrt{R})\,dt = \frac{M(1+\sqrt{R})}{R^{n-1}} \xrightarrow[R\to\infty]{n\ge 2} 0 \end{aligned}\right.$$

לכן לכל $n\ge 2$, $a_n=0$. לכן $\underline{f(z)=a_0+a_1 z}$

(לא לכל קבועים $a_0,a_1\in\mathbb{C}$, המתאימים ל-M נתון)

(ב) נתון כי $|f'(z)| \le M(1+|z|)$, כמקודם:
$$|na_n| \le \frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi}|f'(Re^{it})|\,dt \le \frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi} M(1+R)\,dt =$$
$$= \frac{M(1+R)}{R^{n-1}} \xrightarrow[R\to\infty]{n\ge 3} 0 \quad , \quad n=2 \Rightarrow \frac{M}{R}+M \xrightarrow[R\to\infty]{} M$$

לכן לכל $n\ge 3$, $a_n=0$ לכן $\underline{f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2}$

(כאשר $|a_2|\le\frac{1}{2}M$ וכו')

(ג) נתון כי $|f(z)| \le M(1+|z|)$ אז:
$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{it})}{R^{n+1}e^{i(n+1)t}} iRe^{it}\,dt\right| \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}|f(Re^{it})|\,dt \le \frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} M(1+R)\,dt = \frac{M(1+R)}{R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{n\ge 2} 0$$

לכן $\underline{f(z)=a_0+a_1z}$ (a_0,a_1 מתאימים כנדרש)

3. (א)
$$\cos z\cdot\cosh z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})(e^z+e^{-z})\cdot\frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{4}(e^{iz+z}+e^{z-iz}+e^{iz-z}+e^{-iz-z}) =$$
$$= \underline{\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[(1+i)^n+(1-i)^n+(-1+i)^n+(-1-i)^n\right]z^n}$$

(ב) ראינו בכיתה כי $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}z^{2n}$

כמו כן, $(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ לכן $\arcsin z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

אז
$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}z^{2n}$$

$$\Rightarrow na_n = \begin{cases}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k} & n-1=2k \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases} \qquad a_0=\arcsin 0=0$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases}\frac{1}{2k+1}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k} & n=2k+1 \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$(a+z)^\alpha = \frac{1}{a^\alpha}(1+\frac{z}{a})^\alpha = a^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}a^{-n}z^n \quad a\neq 0$ (ג)

4. האם קיימת פונקציה אנליטית ב-D כך שלכל $z\in D$ מתקיים $|f(z)|=e^{|z|}$?

נניח ש-f כנ"ל, אזי f לא מתאפסת ב-D (שכן $|f(z)|=e^{|z|}>0$ לכל z) לכן $\frac{1}{f}$ אנליטית ב-D וכן לכל $z\in D$, $|\frac{1}{f(z)}|=e^{-|z|}\le 1$. מצד שני, $|\frac{1}{f(0)}|=e^0=1$ לכן $\frac{1}{f}$ משיגה את המקסימום ב-D ולכן, לפי עקרון המקסימום, $\frac{1}{f}$ קבועה לכן f קבועה, אבל פונקציה קבועה לא יכולה לקיים $|f(z)|=e^{|z|}$, לכן לא קיימת f כנ"ל.

5. טווח של פונקציה שלמה לא קבועה צפוף ב-$\mathbb{C}$,

הגדרה: $A\subseteq\mathbb{C}$ נקראת צפופה אם לכל $z\in\mathbb{C}$ ולכל $r>0$ $A\cap B_r(z)\neq\emptyset$ (כאשר $B_r(z)=\{w:|z-w|<r\}$)

נניח בשלילה ש-f שלמה והטווח של f איננו צפוף, כלומר קיים $z_0\in\mathbb{C}$ ו-$r>0$ כך ש $f(\mathbb{C})\cap B_r(z_0)=\emptyset$ לכן לכל $z\in\mathbb{C}$, $r\le|f(z)-z_0|$ ולכן $\frac{1}{r}\ge\left|\frac{1}{f(z)-z_0}\right|$ אבל $f(z)-z_0$ פונקציה שלמה ולא מתאפסת (כי z_0 לא בתמונת f) לכן $\frac{1}{f(z)-z_0}$ שלמה וחסומה לכן, לפי משפט ליוביל, $\frac{1}{f(z)-z_0}=c$ קבועה לכן $f(z)=\frac{1}{c}+z_0$ קבועה, בסתירה להנחה.

6. f שלמה ומקיימת $\mathrm{Re}f(z)\le M$ לכל z עבור $M\in\mathbb{R}$ כלשהו. f שלמה $\Rightarrow$ e^f שלמה (בהרכבה של שלמות) וכן $|e^{f(z)}|=|e^{\mathrm{Re}f(z)}|\underbrace{|e^{i\,\mathrm{Im}f(z)}|}_{1}=e^{\mathrm{Re}f(z)}\le e^M$ לכן e^f שלמה וחסומה, לכן, לפי משפט ליוביל e^f קבועה, $e^f=c$ ולכן $f=\ln c$, כלומר f קבועה.

7. f שלמה, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_0)(z-z_0)^n$ פיתוח טיילור סביב $z_0\in\mathbb{C}$. נניח שלכל $z_0\in\mathbb{C}$ קיים n כך ש $c_n(z_0)=0$.

נניח בשלילה שלכל n, c_n היא לא זהותית 0, $c_n(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$,

f שלמה $\Leftarrow$ c_n שלמה לכל n, לפי משפט האפסים של

פונקציה אנליטית, מכיוון ש $c_n \not\equiv 0$, $\aleph_0 \geq |\{z\in\mathbb{C} : c_n(z)=0\}|$

לכן $|\{z\in\mathbb{C} : \exists n\in\mathbb{N}\ \ c_n(z)=0\}| \le \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$

אבל נתון שלכל $z\in\mathbb{C}$ קיים n כך ש $c_n(z)=0$ לכן

$2^{\aleph_0} = |\mathbb{C}| = |\{z : \exists n\in\mathbb{N}\ \ c_n(z)=0\}| \le \aleph_0$

סתירה, לכן <u>f פולינום</u>